Analyse 21-06-'02

Tentamenopgave[1]

I

Beschouw de functie f gedefineerd op $\mathbb{R}^2$ door

$$f(x,y) = x^3 - y^3 + 6xy$$

1. Bepaal de stationaire punten van f en hun aard: lokaal maximum, lokaal minimum of zadelpunt.

2. Bepaal het waardebereik van f. Zou een van de stationaire punten een absoluut maximum of minimum kunnen zijn ?

II

Notatie: $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$.

1. Beschouw de transformatie $\Phi : (x,y) \mapsto (u,v)$ gedefinieerd op $\mathbb{R}^2_+$ door $u = x$, $v = xy$. Toon aan dat Φ een diffeomorfisme is van $\mathbb{R}^2_+$ op $\mathbb{R}^2_+$ en bereken de inverse transformatie Φ^{-1}.

2. Zij $f : \mathbb{R}^2_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ een functie van de vorm $f(x,y) = F(xy)$ met $F : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continu differentieerbaar. Toon aan dat

$$x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = 0. \tag{1}$$

3. Toon omgekeerd aan dat een continu differentieerbare functie f op $\mathbb{R}^2_+$ die voldoet aan (1) een functie is van de vorm $F(xy)$.

Aanwijzing: Stel $F(u,v) = f(x,y)$ (d.w.z. $F = f \circ \Phi^{-1}$) en toon aan dat $\dfrac{\partial F}{\partial u} = 0$.

III

Zij $D = \{(x,y) : x > 0, y > 0, x^2 + y^2 < 1\}$.

1. Bereken $I = \iint_D xydxdy$ in cartesische coördinaten.

2. Beschrijf D in poolcoördinaten en bereken I in poolcoördinaten.

3. Zij $O = \{(x,y,z) : x > 0, y > 0, z > 0, x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$. Bereken $\iiint_O xyzdxdydz$.

IV

Zij $O = (0,+\infty) \times (0,+\infty) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Zij $f : O \longrightarrow \mathbb{R}$ de functie gedefinieerd door

$$f(x,y,z) = x^2 - y^2 - xyz - \tan z$$

1. Toon aan dat de verzameling $S\{(x,y,z) \in O : f(x,y,z) = 0\}$ een deelvariëteit is.

2. Wat is de dimensie van S ?

3. Toon aan dat er een open verzameling $U \subset (0,+\infty)^2$ bestaat met $(1,1) \in U$, een open verzameling $V \subset \mathbb{R}$ met $0 \in V$ en een differentieerbare functie $\varphi : U \longrightarrow V$ zodat $(x,y,z) \in S, (x,y) \in U, z \in V$ dan en slechts dan als $(x,y) \in U$, $z = \varphi(x,y)$.

4. Bereken $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(1,1)$.

[1] De onderdelen I, II, III en IV zijn onafhankelijk